## § 1.3. Введение в теорию нечетких множеств

Пусть - универсальное множество, - элемент , а - определенное свойство. Обычное (четкое) подмножество универсального множества , элементы которого удовлетворяют свойство , определяется как множество упорядоченной пары , где – характеристическая функция, принимающая значение 1, когда x удовлетворяет свойство , и 0 – в другом случае (см. [2], [3], [5], [7], [13], [21], [23] и др.).

Нечеткое подмножество отличается от обычного тем, что для элементов из нет однозначного ответа «нет» относительно свойства . В связи с этим, нечеткое подмножество универсального множества E определяется как множество упорядоченной пари , где – характеристическая функция принадлежности (или просто функция принадлежности), принимающая значение в некотором упорядоченном множестве (например, ).

Функция принадлежности указывает степень (или уровень) принадлежности элемента к подмножеству . Множество называют множеством принадлежностей. Если , тогда нечеткое подмножество может рассматриваться как обычное или четкое множество.

Пример 1. Рассмотрим множество всех чисел от 0 до 10. Определим подмножество множества всех действительных чисел от 5 до 8, .

Покажем функцию принадлежности множества , эта функция ставит в соответствие число 1 или 0 каждому элементу в , в зависимости от того, принадлежит данный элемент подмножеству или нет. Результат представлен на следующем рисунке:

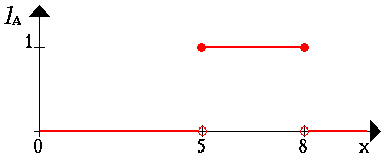


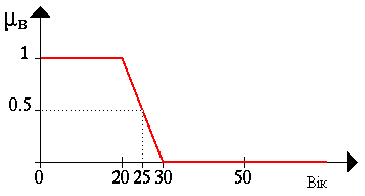
Рис. 1. Функция принадлежности множества A,

Можно интерпретировать элементы, соответствующие 1, как элементы, находящиеся в множестве , а элементы, соответствующие 0, как элементы, не находящиеся в множестве .

Эта концепция используется во многих областях. Но существуют ситуации, в которых данной концепции будет не хватать гибкости.

Пример 2. .

В первом примере мы кодировали все элементы множества с помощью 0 ли 1. Простым способом обобщить данную концепцию является введение значений характеристической функции в единичном интервале .



Мол.люд.

Рис. 2. Характеристическая функция множества молодых людей

На рис. 2 приведена характеристическая функция множества молодых людей.

Пример 3. Пусть , ; – нечеткое множество, для которого ; ; ; ; .

Тогда A можно представить в виде:

или ,

(знак «+» является операцией не сложения, а объединения) или

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 0,3 | 0 | 1 | 0,5 | 0,9 |

Пример 4. Пусть , . Нечеткое множество «несколько» можно определить таким образом:

.

Пример 5. Пусть . Нечеткое множество «малый» можно определить:

 .

Пример 6. Пусть

– множество марок автомобилей, а – универсальное множество «стоимость», тогда на мы можем определить нечеткие множества типа: «для небогатых», «для среднего класса», «престижные», с функциями принадлежности типа:



для небогатых для среднего класса престижные

стоимость

Рис. 3. Нечеткие множества: «для небогатых», «для среднего класса», «престижные» с функциями принадлежности

В приведенных выше примерах использованы прямые методы, когда эксперт задает для любого значение  или определяет функцию принадлежности. Как правило, прямые методы задания функции принадлежности используются для измеримых понятий, таких как скорость, час, расстояние, давление, температура и т.д.

Во многих задачах при характеристике объекта можно выделить набор признаков и для любого из них определить полярные значения, отвечающие значениям функции принадлежности, 0 или 1.

Пример 7. В задаче распознавания лица можно выделить следующие признаки:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 1 |
|  | высота лба | низкий | широкий |
|  | профиль носа | курносый | горбатый |
|  | длина носа | короткий | длинный |
|  | разрез глаз | узкий | широкий |
|  | цвет глаз | светлый | Темный |
| … |  |  |  |

Для конкретного лица А эксперт, исходя из приведенной шкалы, задает , формируя векторную функцию принадлежности {A(x1).

Косвенные методы определения значений функции принадлежности используются в случаях, когда нет элементарных измеримых свойств для определения нечеткого множества. Как правило, это методы попарных сравнений. Если бы значение функций принадлежности были известны, например, , , тогда попарные сравнения можно представить матрицей отношений , где (операция деления).

**Операции над нечеткими множествами.** Пусть и – нечеткие множества на универсальном множестве .

– Говорят, что содержится в , если   . Обозначение: . Иногда используют термин «доминирование», то есть в случае если , говорят, что доминирует .

– и равны, если   . Обозначение: .

– Пусть , и – нечеткие множества, заданные на . и дополняют друг друга, если

 – . Обозначение:  или .

Очевидно, что . (Дополнение определено для , но очевидно, что его можно определить для любого упорядоченного ).

– Пересечение: – наибольшее нечеткое подмножество, которое содержится одновременно в и . ).

– Объединение: – наименьшее нечеткое подмножество, которое включает как , так и , с функцией принадлежности:

).

– Разность:  с функцией принадлежности:

).

– Дизъюнктивная сумма: с функцией принадлежности:

.